

## MODEL PERSEDIAAN UNTUK BARANG MENGUSANG DENGAN LEAD TIME BERDISTRIBUSI EKSPONENSIAL

Eduard Sondakh, Erna Mulyati

D3 Administrasi Logistik, Sekolah Vokasi Universitas Logistik dan Bisnis Internasional

email: [Eduard@ulbi.ac.id](mailto:Eduard@ulbi.ac.id)<sup>1</sup>

S2 Manajemen Logistik, Fakultas Logistik Teknologi dan Bisnis, Universitas Logistik dan Bisnis Internasional

email: [ernamulyati@ulbi.ac.id](mailto:ernamulyati@ulbi.ac.id)<sup>2</sup>

### Abstrak

Model persediaan untuk barang yang mengalami penurunan kualitas telah menjadi fokus penting dalam penelitian karena banyaknya produk yang rusak selama penyimpanan, seperti makanan dan obat-obatan. Penelitian sebelumnya belum sepenuhnya mempertimbangkan pengaruh lead time dalam mengembangkan model persediaan barang rusak. Studi ini bertujuan mengembangkan model persediaan dengan mempertimbangkan lead time berdistribusi eksponensial, di mana permintaan berkurang secara eksponensial dan barang yang rusak tidak dapat dipulihkan. Model ini mencakup analisis biaya penyimpanan, kekurangan, pengusangan, dan pemesanan untuk menentukan waktu siklus optimal serta titik pemesanan kembali. Dalam artikel ini akan mengembangkan model matematika dengan mempertimbangkan pengusangan dengan laju konstan dan lead time berdistribusi eksponensial dan laju permintaannya meluruh secara eksponensial. Hasil analisis menunjukkan bahwa lead time yang bervariasi mempengaruhi reorder point. Metode numerik digunakan untuk menentukan nilai optimal waktu siklus, sedangkan solusi tertutup tidak ditemukan dalam penelitian ini. Studi mendatang dapat memperluas model dengan mencari solusi eksplisit bagi waktu siklus optimal.

**Kata Kunci:** persediaan barang rusak, lead time stokastik, distribusi eksponensial

### Abstract

*Inventory models for deteriorating items have become an important focus in research due to the prevalence of products that degrade during storage, such as food and pharmaceuticals. Previous studies have not fully considered the impact of lead time in developing inventory models for deteriorating items. This study aims to develop an inventory model that incorporates exponentially distributed lead time, where demand decreases exponentially, and deteriorating items cannot be restored. This article presents a mathematical model considering constant deterioration rates, stochastic lead time following an exponential distribution, and exponentially decaying demand. The analysis shows that varying lead times significantly influence the reorder point. Numerical methods are used to determine the optimal cycle time, although a closed-form solution has not been achieved in this study. Future research could extend the model by deriving an explicit solution for the optimal cycle time.*

**Keywords:** *Deteriorating Items, Stochastic Lead Time, Exponential Distribution*

## 1. PENDAHULUAN

Pengaruh dan pemeliharaan persediaan untuk barang-barang yang rusak akibat penurunan kualitas telah menarik perhatian banyak peneliti dalam beberapa tahun terakhir, karena sebagian besar fisik barang mengalami kerusakan seiring waktu. Dalam kehidupan nyata, banyak barang yang rusak, membusuk, atau terpengaruh oleh berbagai faktor lain sehingga tidak dalam kondisi sempurna untuk memenuhi permintaan. Barang seperti makanan, obat-obatan, produk farmasi, dan zat radioaktif adalah contoh komoditas yang dapat mengalami kerusakan selama periode penyimpanan normal. Akibatnya, kerugian akibat penurunan kualitas ini harus diperhitungkan dalam analisis sistem. Oleh karena itu, kerusakan atau penurunan kualitas barang fisik dalam persediaan merupakan faktor yang sangat relevan, dan para peneliti menyadari pentingnya memasukkan aspek ini sebagai pertimbangan dalam pengembangan

model persediaan. Beberapa penelitian sebelumnya telah dilakukan pengembangan model persediaan barang yang mengalami kerusakan diantaranya (**Chakrabarty, Giri, and Chaudhuri 1998**) mengembangkan model persediaan barang yang mengalami kerusakan, dengan mengambil tingkat permintaan yang bervariasi terhadap waktu dan memperhitungkan kekurangan persediaan. Kegagalan dan harapan hidup banyak barang dapat dinyatakan dalam bentuk distribusi Weibull. Permintaan produk konsumen biasanya bervariasi seiring waktu dan karenanya, tingkat permintaan harus dianggap bergantung pada waktu. Mungkin juga ada kekurangan persediaan sesekali karena berbagai alasan. (**Ghosh and Chaudhuri 2004**) mengembangkan model persediaan untuk barang yang mengalami kerusakan dan memiliki persediaan sesaat, memperhitungkan permintaan kuadrat yang berubah terhadap waktu, dan kekurangan persediaan. Penelitiannya menggunakan distribusi Weibull dua parameter yang diambil untuk mewakili waktu kerusakan. Model diselesaikan secara analitis untuk memperoleh solusi optimal dari masalah tersebut. Kemudian diilustrasikan dengan bantuan contoh numerik. Model ini juga mempelajari sensitivitas solusi optimal terhadap perubahan nilai parameter sistem yang berbeda serta fitur khusus dari permintaan kuadratis terhadap waktu. (**Gothi, Joshi, and Parmar 2017**) mengembangkan model persediaan untuk barang yang rusak dan dapat diperbaiki dengan permintaan linier. Penelitiannya menggunakan distribusi eksponensial untuk menggambarkan distribusi waktu kerusakan. Dalam modelnya peneliti mempertimbangkan kekurangan yang diperbolehkan terjadi dan barang yang rusak dapat diperbaiki. Model ini dipecahkan secara analitis untuk memperoleh solusi optimal dari masalah tersebut. Model diilustrasikan dengan contoh numerik dan memperhitungkan analisis sensitivitas. (**Fergany and Hollah 2018**) mengembangkan model persediaan dengan menerapkan kebijakan permintaan berupa variabel acak mengikuti distribusi Pareto tanpa waktu tunggu, beberapa biaya bervariasi, kekurangan diizinkan, dan tingkat kerusakan mengikuti distribusi eksponensial. Fungsi objektif di bawah kendala diberlakukan di sini dalam lingkungan yang jelas dan tidak jelas. Menggunakan metode analisis numerik Dimana tujuan utamanya adalah menemukan nilai optimal dari empat variabel keputusan (tingkat inventaris maksimum, waktu kehabisan stok, waktu kerusakan, dan waktu tinjauan), yang dapat meminimalkan total biaya tahunan yang diharapkan berdasarkan asumsi. (**Fadli, Sudrajat, and Lesmana 2020**) mengembangkan model EOQ untuk item yang mengalami deteriorasi, dengan kebijakan fungsi permintaan menurun secara eksponensial, laju deteriorasi konstan, kekurangan diizinkan, dan terjadi pengembalian. Model ini bertujuan untuk menentukan biaya total minimum dengan menentukan waktu pengembalian optimal dan jumlah pesanan optimal. Analisis sensitivitas dilakukan untuk melihat efek perubahan parameter untuk Solusi optimal. (**Setiawan, Lesmono, and Limansyah 2021**) Mengembangkan model persediaan dengan mempertimbangkan penurunan Weibull untuk permintaan eksponensial dan permintaan kuadrat dengan kekurangan barang yang bergantung pada waktu. Penelitian ini memberikan hasil dan analisis sensitivitas bahwa total biaya persediaan akan meningkat sesuai dengan tingkat permintaan dan tingkat penurunan barang. (**Agatamudi Lakshmana Rao and Satyanarayana Bora 2023**) mengembangkan model persediaan dengan mempertimbangkan tingkat kerusakan mengikuti distribusi eksponensial, permintaan yang bergantung pada kekurangan dan tanpa kekurangan. Penelitian ini juga mengukur analisis sensitivitas yang dilakukan untuk mempelajari dampak perubahan nilai-nilai dari setiap parameter. Dari penelitian-penelitian sebelumnya tidak ada yang membahas terkait lead time padahal ini sangat berpengaruh dalam menghitung persediaan untuk barang yang rusak. Lead time merupakan satu hal yang sangat penting karena dalam masa ini barang yang telah dipesan ke pemasok belum tiba sehingga apabila terjadi kesalahan perhitungan maka permintaan dari pelanggan tidak akan terlayani, hal ini kadang terjadi di beberapa perusahaan. Ketidakpastian dalam hal lamanya lead time perlu diperhitungkan. Tujuan dari makalah ini adalah untuk mengembangkan model persediaan untuk barang-barang yang rusak dengan memperhitungkan *lead time*.

## 2. METODE PENELITIAN

### NOTASI DAN ASUMSI

Model yang dibangun dalam penelitian ini diuraikan sebagai berikut. Di setiap saat  $t$ , tingkat persediaan bernilai  $I(t)$ . Di awal setiap siklus persediaan, tingkat persediaan bernilai  $I_0 = I(0)$ . Asumsi-asumsi model ini adalah sebagai berikut.

1. Laju permintaan,  $D$ , berkurang secara eksponensial  $D(t) = \lambda e^{-\lambda t}$  dengan  $\lambda > 0$ .
2. Permintaan yang tidak terlayani seluruhnya di-backlog.
3. Lead time,  $L$ , bersifat probabilistik dengan fungsi densitas peluang distribusi eksponensial  $\varphi_L(l) = \frac{1}{M} e^{-l/M}$ .
4. Barang yang usang tidak dapat dipulihkan atau digantikan.
5. Ongkos simpan ( $s$ ), ongkos kekurangan ( $k$ ), ongkos keusangan ( $u$ ), dan ongkos pesan ( $p$ ) konstan.
6. Laju pengusangan,  $\alpha$ , konstan dan  $\alpha \ll \lambda$ .

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Sejak siklus persediaan dimulai, tingkat persediaan berkurang yang disebabkan adanya permintaan dan kerusakan barang. Proses ini terus berlanjut hingga pada saat  $t = t_1$  tingkat persediaan bernilai 0. Persamaan diferensial terkait proses ini adalah sebagai berikut.

$$\frac{dI(t)}{dt} + \alpha I(t) = -\lambda e^{-\lambda t} ; 0 \leq t < t_1 \quad (1)$$

Sejak persediaan habis hingga saatnya pengisian kembali tidak ada barang yang mengalami pengusangan namun permintaan terus terjadi. Misalkan pengisian kembali dilakukan pada saat  $t = T$ . Dengan demikian persamaan diferensial yang berlaku pada selang waktu tersebut adalah sebagai berikut.

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\lambda e^{-\lambda t} ; t_1 \leq t \leq T \quad (2)$$

Dengan menggunakan aproksimasi Taylor derajat pertama dalam menyelesaikan (1) dengan syarat batas  $I(t_1) = 0$  adalah sebagai berikut.

$$I(t) = \frac{1}{2} \lambda [2 - (\lambda - \alpha)(t + t_1)](t - t_1) e^{-\alpha t} \quad (3)$$

Di awal setiap siklus persediaan, tingkat persediaan adalah sebesar  $I_0 = I(0)$ . Dengan demikian tingkat persediaan di awal siklus adalah sebagai berikut.

$$I_0 = \frac{1}{2} \lambda t_1 [(\lambda - \alpha)t_1 - 2] \quad (4)$$

Solusi dari (2) dengan syarat batas  $I(t_1) = 0$  adalah sebagai berikut.

$$I(t) = e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t_1} \quad (5)$$

Jadi, tingkat persediaan pada sembarang waktu  $t$  dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$I(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \lambda [2 - (\lambda - \alpha)(t + t_1)](t - t_1) e^{-\alpha t} & ; 0 \leq t < t_1 \\ e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t_1} & ; t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (6)$$

#### PERHITUNGAN ONGKOS-ONGKOS

Pada selang waktu  $0 \leq t < t_1$  timbul ongkos simpan dan ongkos keusangan, sedangkan pada  $t_1 \leq t \leq T$  timbul ongkos kekurangan. Kekurangan terjadi apabila jumlah antara banyaknya barang yang mengalami pengusangan dan banyaknya permintaan selama lead time melebihi titik pemesanan kembali (*reorder point*).

Ongkos simpan (OS) dihitung sebagai berikut.

$$OS = s \int_0^{t_1} I(t) dt = s \int_0^{t_1} \frac{1}{2} \lambda [2 - (\lambda - \alpha)(t + t_1)](t - t_1) e^{-\alpha t} dt \quad (7)$$

Ongkos keusangan (OU) dihitung sebagai berikut.

$$OU = u(I_0 - 1 + e^{-\lambda t_1}) = \frac{1}{2} u (\lambda t_1 [(\lambda - \alpha)t_1 - 2] - 2 + 2e^{-\lambda t_1}) \quad (8)$$

Jika terjadi kekurangan persediaan maka akan timbul ongkos kekurangan (OK) sebagai berikut.

$$OK = \frac{k}{\lambda} [(\lambda T - \lambda t_1 - 1)e^{-\lambda t_1} + e^{-\lambda T}] \quad (9)$$

Total biaya persediaan (TC) merupakan jumlah antara ongkos simpan, ongkos keusangan, ongkos kekurangan, dan ongkos pesan. Jadi, total biaya persediaan per satuan waktu, dilambangkan dengan ATC, dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$ATC = \frac{OS+OU+OK+p}{T} \tag{10}$$

dengan OS, OU, dan OK adalah sebagaimana yang dinyatakan (7), (8), dan (9).

Jika dalam model ini *lead time* konstan maka tidak akan terjadi kekurangan persediaan karena total permintaan dan pengurangan selama *lead time* dapat diperhitungkan dengan tepat. Dalam hal ini,  $t_l = T$ . Namun dalam model ini tidak ada kepastian mengenai *lead time* yang menjadi kenyataan, sehingga selalu ada peluang terjadi kekurangan persediaan. Kekurangan persediaan ini mulai terjadi pada saat  $t = t_l < T$ , di mana pada saat tersebut sudah tidak ada barang persediaan. Jadi,  $I(t_l) = 0$ . Dengan memisalkan  $t_l = fT$ , ATC pada (10) dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$ATC = \frac{s \int_0^{fT} \frac{1}{2} \lambda [2 - (\lambda - \alpha)(t + fT)] (t - fT) e^{-\alpha t} dt + \frac{1}{2} u (\lambda fT [(\lambda - \alpha) fT - 2] - 2 + 2e^{-\lambda fT}) + \frac{k}{\lambda} [(\lambda T - \lambda fT - 1) e^{-\lambda fT} + e^{-\lambda T}] + p}{T} \tag{11}$$

Untuk mencari nilai optimal  $f$  dan  $T$ , perlu ditentukan terlebih dahulu titik stasionernya, dengan menyelesaikan persamaan simultan sebagai berikut.

$$\frac{\partial ATC}{\partial T} = \frac{\partial ATC}{\partial f} = 0 \tag{12}$$

Dengan aproksimasi Taylor derajat 1 diperoleh persamaan-persamaan berikut.

$$\frac{\partial ATC}{\partial T} = \frac{\lambda f^2 [sf(\alpha + 5\lambda + 14) + 6u(2\lambda - \alpha) + 24k]}{12} T^2 - [2f\lambda u + (2f + 1)k]T + pT^{-1} \tag{13}$$

$$\frac{\partial ATC}{\partial f} = \frac{\lambda f [sf(\alpha + 5\lambda + 14) + 4u(2\lambda - \alpha) + 16k]}{4} T^2 - (2\lambda u + 2k)T \tag{14}$$

Dari (12), (14), dan kondisi  $T \neq 0$  diperoleh solusi sebagai berikut.

$$T = \frac{8(\lambda u + k)}{\lambda f [sf(\alpha + 5\lambda + 14) + 4u(2\lambda - \alpha) + 16k]} \tag{15}$$

Dari (12) dan (13), diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\lambda f^2 [sf(\alpha + 5\lambda + 14) + 6u(2\lambda - \alpha) + 24k] T^3 - 12[2f\lambda u + (2f + 1)k] T^2 + 12p = 0 \tag{16}$$

Substitusikan  $T$  pada (15) ke dalam (16), dan dengan memisalkan  $z = sf(\alpha + 5\lambda + 14) + 4u(2\lambda - \alpha) + 16k$  diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$12p\lambda^2 f^2 z^3 - 768[2(\lambda u + k)f + k](\lambda u + k)^2 z + 512f [sf(\alpha + 5\lambda + 14) + 6u(2\lambda - \alpha) + 24k](\lambda u + k)^3 = 0 \tag{17}$$

Persamaan (17), yang merupakan persamaan polinomial, selanjutnya diselesaikan dengan metode numerik. Misalkan solusi (17) adalah  $f = f_0$ . Akibatnya, menurut (15), solusi bagi  $T$  adalah  $T_0 =$

$$\frac{8(\lambda u + k)}{\lambda f_0 [sf_0(\alpha + 5\lambda + 14) + 4u(2\lambda - \alpha) + 16k]}$$

### PERHITUNGAN TITIK PEMESANAN KEMBALI

Titik pemesanan kembali menunjukkan tingkat persediaan pada saat pemesanan ulang dilakukan sedemikian hingga selama *lead time* tidak terjadi kekurangan barang. Dalam model ini, satu-satunya penyebab kekurangan barang adalah *lead time* yang bersifat probabilistik. Semakin tinggi nilai *lead time*, semakin tinggi pula peluang terjadinya kekurangan barang. Karena adanya risiko kekurangan barang, titik pemesanan kembali harus melebihi jumlah antara banyaknya barang yang mengalami pengurangan dan banyaknya permintaan selama *lead time*. Misalkan titik pemesanan kembali dalam model ini adalah ROP. Jika *lead time* bernilai  $l$  maka total permintaan selama *lead time* dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$PL = \int_{T-l}^T \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda(T-l)} - e^{-\lambda T}$$

Karena *lead time* merupakan variabel acak, misalkan dengan parameter  $M$ , maka yang lebih relevan diterapkan dalam perhitungan titik pemesanan kembali adalah rata-rata total permintaan selama *lead time*. Besarnya rata-rata ini dapat dihitung sebagai berikut.

$$\overline{PL} = \int_0^\infty (e^{-\lambda(T-l)} - e^{-\lambda T}) \varphi_L(l) dl = e^{-\lambda T} \cdot \frac{\lambda M}{1 - \lambda M} \tag{18}$$

Sementara itu, jika *lead time* bernilai  $l$  maka total banyaknya barang yang mengalami pengurangan selama *lead time* dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$UL = \int_{T-l}^T \alpha I(t) dt = \int_{T-l}^T \alpha \left( \frac{\lambda}{\lambda - \alpha} e^{-\lambda t} + C e^{-\alpha t} \right) dt$$

$$UL = \frac{\alpha}{\lambda - \alpha} (e^{-\lambda(T-l)} - e^{-\lambda T}) + C (e^{-\alpha(T-l)} - e^{-\alpha T}) \quad (19)$$

Pada (19),  $C = \frac{\lambda}{\alpha - \lambda} e^{(\alpha - \lambda)T}$ .

Akibatnya, rata-rata banyaknya pengurangan selama *lead time* adalah sebagai berikut.

$$\overline{UL} = \int_0^{\infty} \left[ \frac{\alpha}{\lambda - \alpha} (e^{-\lambda(T-l)} - e^{-\lambda T}) + C (e^{-\alpha(T-l)} - e^{-\alpha T}) \right] \varphi_L(l) dl$$

Solusi bagi integral tersebut adalah sebagai berikut.

$$\overline{UL} = \frac{\alpha}{\lambda - \alpha} [e^{-\lambda(T-L)} - e^{-\lambda T}] + \frac{\lambda e^{(\alpha - \lambda)T}}{\alpha - \lambda} [e^{-\alpha(T-L)} - e^{-\alpha T}]$$

Jadi, titik pemesanan kembalinya adalah sebagai berikut.

$$ROP = e^{-\lambda T} \cdot \frac{\lambda M}{1 - \lambda M} + \frac{\alpha}{\lambda - \alpha} [e^{-\lambda(T-L)} - e^{-\lambda T}] + \frac{\lambda e^{(\alpha - \lambda)T}}{\alpha - \lambda} [e^{-\alpha(T-L)} - e^{-\alpha T}] \quad (20)$$

#### 4. KESIMPULAN DAN SARAN

Penentuan nilai optimal waktu siklus persediaan dan titik pemesanan Kembali dengan asumsi *lead time* berdistribusi eksponensial, diperoleh waktu siklus optimal sebesar  $T^* = \frac{8(\lambda u + k)}{\lambda f [s f^*(\alpha + 5\lambda + 14) + 4u(2\lambda - \alpha) + 16k]}$ , dengan  $f^*$  memenuhi persamaan  $12p\lambda^2 f^2 z^3 - 768[2(\lambda u + k)f + k](\lambda u + k)^2 z + 512f[sf(\alpha + 5\lambda + 14) + 6u(2\lambda - \alpha) + 24k](\lambda u + k)^3 = 0$ . Nilai  $f$  yang optimal, yaitu  $f = f^*$  dapat ditentukan dengan metode numerik. Selanjutnya, titik pemesanan kembali dapat ditentukan dengan rumus  $ROP = e^{-\lambda T} \cdot \frac{\lambda M}{1 - \lambda M} + \frac{\alpha}{\lambda - \alpha} [e^{-\lambda(T-L)} - e^{-\lambda T}] + \frac{\lambda e^{(\alpha - \lambda)T}}{\alpha - \lambda} [e^{-\alpha(T-L)} - e^{-\alpha T}]$ . Berdasarkan pengembangan model di atas bahwa *lead time* sangat berpengaruh, semakin tinggi rata-rata lamanya *lead time* maka akan sangat berpengaruh terhadap nilai ROP. Kekurangan penelitian ini adalah tidak didapatkannya solusi tertutup bagi nilai optimal waktu siklus persediaan ( $T$ ). Sebagai kemungkinan pengembangan penelitian selanjutnya adalah pencarian solusi tertutup bagi nilai optimal waktu siklus.

#### 5. REFERENSI

- Agatamudi Lakshmana Rao, and Satyanarayana Bora. 2023. "Inventory Model for Exponential Deterioration Items with Power Dependent Demand." *International Journal of Information Technology, Research and Applications* 2(3): 31–38. doi:10.59461/ijitra.v2i3.70.
- Chakrabarty, Tripti, Bibhas Chandra Giri, and Krispasindhu S. Chaudhuri. 1998. "An EOQ Model for Items with Weibull Distribution Deterioration, Shortages and Trended Demand: An Extension of Philip's Model." *Computers and Operations Research* 25(7–8): 649–57. doi:10.1016/s0305-0548(97)00081-6.
- Fadli, Fadli, Sudarajat Sudrajat, and E. Lesmana. 2020. "An Inventory Model for Deteriorating Items With Exponential Declining Demand and Return." *Jurnal Ilmiah Sains* 20(1): 31. doi:10.35799/jis.20.1.2020.27767.
- Fergany, Hala Aly, and Osama Mahmoud Hollah. 2018. "A Probabilistic Inventory Model with Two-Parameter Exponential Deteriorating Rate and Pareto Demand Distribution." *International Journal of Scientific Research and Management (IJSRM)* 6(05): 31–43. doi:10.18535/ijrm/v6i5.m01.
- Ghosh, S K, and K S Chaudhuri. 2004. "An Order-Level Inventory Model for a Deteriorating Item with Weibull Distribution Deterioration, Time-Quadratic Demand and Shortages." *Advanced Modeling*

*and Optimization* 6(1): 21–35.

Gothi, U. B., Malav Joshi, and Kirtan Parmar. 2017. “An Inventory Model of Repairable Items with Exponential Deterioration and Linear Demand Rate.” *IOSR Journal of Mathematics* 13(03): 75–82. doi:10.9790/5728-1303047582.

Setiawan, Raka Iswara Prathama, Julius Dharma Lesmono, and Taufik Limansyah. 2021. “Inventory Control Problems with Exponential and Quadratic Demand Considering Weibull Deterioration.” *Journal of Physics: Conference Series* 1821(1). doi:10.1088/1742-6596/1821/1/012057.