EKSPEKTASI BANYAKNYA KEKURANGAN PERSEDIAAN SELAMA *LEAD TIME* DALAM MODEL PROBABILISTIK SEDERHANA

Eduard Sondakh[1)]
[1)] Program Studi D3 Administrasi Logistik, Universirtas Logistik dan Bisnis Internasional
Email: eduard@ulbi.ac.id

Abstrak

Model probabilistik sederhana merupakan suatu perkembangan lebih lanjut dari model Economic Order Quantity yang dipelopori oleh Harris, dengan ciri bahwa permintaan terhadap produk bersifat probabilistik. Dengan tidak menentunya permintaan, mungkin terjadi kekurangan persediaan barang dalam masa ancang-ancang. Dalam literatur-literatur yang relevan salah satu materi yang menjadi perhatian adalah ekspektasi banyaknya kekurangan persediaan selama waktu ancang-ancang tersebut. Besarnya rata-rata kekurangan ini dibahas juga dalam sebuah buku berjudul Sistem Inventori yang ditulis oleh Senator Nur Bahagia, namun ternyata terdapat kesalahan di dalamnya. Artikel ini dibuat untuk memperbaiki kesalahan tersebut. Dua pendekatan yang telah dilakukan untuk menurunkan rumus ekspektasi shortage tersebut memberikan kesimpulan yang konsisten, yaitu bahwa terdapat kesalahan fatal dalam buku tersebut.

Kata Kunci: *kekurangan persediaan, permintaan stokastik*

1. PENDAHULUAN

Salah satu kajian dalam bidang logistik adalah model-model persediaan, yang menurut Erlenkotter dipelopori pertama kali oleh Harris dengan model persediaannya Economic Order Quantity (EOQ) pada tahun 1913. Salah satu asumsi model ini adalah bahwa permintaan bersifat konstan, yang dalam praktik sangat jarang dijumpai. Perkembangan lebih lanjut dapat dilihat dalam Hadley dan Whitin [2], yang banyak mengurai berbagai model persediaan, termasuk model-model persediaan dengan pola permintaan yang bersifat stokastik.

Karya Hadley dan Whitin tersebut telah dijadikan rujukan oleh Bahagia [1] dalam membahas model probabilistik sederhana. Buku karangan Bahagia itu pun sering dijadikan rujukan dalam penelitian-penelitian di bidang persediaan, seperti dapat ditemukan dalam Setiadi dan Raihan [4], Lati dan Aktavia [3], Fayarun [5] dan Syamil et. al. [6]. Yang menjadi masalah adalah bahwa terdapat rumus yang salah yang ditulis Bahagia [1], yaitu rumus ekspektasi banyaknya kekurangan persediaan (*shortage*) pada persamaan (7-2) di halaman 136 buku tersebut. Berdasarkan temuan kesalahan tersebut, yang menjadi rumusan masalah penelitian ini adalah bagaimana rumus ekspektasi banyaknya kekurangan persediaan selama waktu ancang-ancang, yang benar. Tujuan dilakukannya penelitian ini adalah untuk memperbaiki kesalahan yang terdapat dalam Bahagia [1], mengingat buku tersebut banyak dijadikan rujukan dalam penelitian-penelitian di bidang persediaan.

2. METODE PENELITIAN

Asumsi yang digunakan dalam penelitian ini adalah: 1) barang yang dipesan tiba sekaligus, 2) selang waktu antara barang dipesan dan barang tiba, dinamakan *lead time*, bersifat konstan, 3) permintaan selama *lead time* berdistribusi normal dengan rata-rata D_L dan simpangan baku S_L, 4) pemesanan kembali (*reorder*) dilakukan pada saat tingkat persediaan mencapai r, dan 5) peluang terjadinya kekurangan persediaan selama *lead time* diketahui sebesar α. Berdasar pada asumsi-asumsi tersebut, penelitian ini akan menjawab berapakah ekspektasi banyaknya kekurangan persediaan selama *lead time*.

Penelitian ini dilakukan dengan beberapa tahap. Di tahap awal, penurunan rumus ekspektasi banyaknya kekurangan persediaan selama *lead time* dilakukan berdasarkan proposisi mengenai ekspektasi tersebut sebagaimana dinyatakan oleh Bahagia [1]. Tahap selanjutnya, penurunan rumus yang sama dilakukan dengan bertitik tolak pada salah satu proposisi dalam Hadley dan Whitin [2] sebagai salah satu literatur yang dirujuk oleh Bahagia [1]. Tahap terakhir yaitu menguji konsistensi hasil-hasil yang diperoleh dari kedua pendekatan tersebut.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Menurut Bahagia [1], jika x menyatakan banyaknya permintaan selama *lead time*, r = *reorder point*, dan *f* adalah fungsi densitas peluang banyaknya permintaan selama *lead time*, maka ekspektasi permintaan yang tidak terpenuhi selama *lead time*, yang untuk selanjutnya dilambangkan dengan *N*, dapat dinyatakan sebagai berikut.

$N = \int_r^\infty (x-r)f(x)dx$ .... (1)

Berdasarkan asumsi penelitian nomor 3, yaitu bahwa permintaan selama *lead time* berdistribusi normal dengan rata-rata D_L dan simpangan baku S_L, diperolehlah $f(x) = n(x;\, D_L, S_L)$, dengan $n(x;\, D_L, S_L)$ adalah fungsi densitas peluang normal dengan rata-rata D_L dan simpangan baku S_L sehingga (1) dapat dinyatakan sebagai:

$N = \int_r^\infty (x-r)n(x; D_L, s_L)dx$ .... (2)

Untuk menyederhanakan notasi, untuk selanjutnya penulisan D_L disederhanakan menjadi μ dan S_L disederhanakan menjadi σ. Jadi, (2) dapat dinyatakan sebagai $N = \int_r^\infty (x-r)n(x;\mu,\sigma)dx$. Selanjutnya, dengan mensubstitusikan $n(x;\mu,\sigma) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ ke dalam (2), diperolehlah:

$$N = \int_r^\infty (x-r)n(x;\mu,\sigma)dx$$

$$N = \int_r^\infty (x-r)\cdot\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}dx$$

Untuk mengevaluasi integral tersebut, misalkan $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$. Akibatnya, $dx = \sigma\, dz$ dan $x - r = \mu + z\sigma - r$. Dengan mensubstitusikan, diperoleh:

$$N = \int_{\frac{r-\mu}{\sigma}}^\infty (\mu + z\sigma - r)\cdot\frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\sigma\, dz$$

Dengan melambangkan fungsi densitas peluang normal baku sebagai ϕ, diperolehlah:

$$N = \int_{\frac{r-\mu}{\sigma}}^\infty (\mu + z\sigma - r)\phi(z)dz$$

$$N = (\mu - r)\int_{\frac{r-\mu}{\sigma}}^\infty \phi(z)dz + \sigma\int_{\frac{r-\mu}{\sigma}}^\infty z\phi(z)dz$$

$$N = \sigma\int_{\frac{r-\mu}{\sigma}}^\infty z\phi(z)dz - (r-\mu)\int_{\frac{r-\mu}{\sigma}}^\infty \phi(z)dz$$

Jika kita definisikan z_α adalah suatu bilangan nyata sedemikian hingga $\int_{z_\alpha}^\infty \phi(z)dz = \alpha$ maka dengan memisalkan $\frac{r-\mu}{\sigma} = z_\alpha$, ekspektasi permintaan yang tidak terpenuhi selama *lead time* dapat dinyatakan sebagai:

$N = \sigma\int_{z_\alpha}^\infty z\phi(z)dz - \sigma z_\alpha \int_{z_\alpha}^\infty \phi(z)dz.$

$N = \sigma\int_{z_\alpha}^\infty z\phi(z)dz - \sigma z_\alpha\cdot\alpha$ .... (3)

Di halaman 144 karya Hadley dan Whitin [2] terdapat suatu teorema yang menyatakan bahwa $\phi(w) = \int_w^\infty z\phi(z)dz$, sehingga (3) dapat dinyatakan sebagai $N = \sigma\phi(z_\alpha) - \sigma z_\alpha\cdot\alpha$. Selanjutnya, dengan pemfaktoran diperoleh:

$N = \sigma[\phi(z_\alpha) - z_\alpha\cdot\alpha]$ .... (4)

Bahagia [1], dalam tabelnya di halaman 256 dan 257, secara implisit menggunakan lambang $\psi(z_\alpha)$ untuk menyatakan $\phi(z_\alpha) - z_\alpha\cdot\alpha$ dan menamakannya sebagai *ekspektasi parsial*. Jadi, berdasarkan hal ini, ekspektasi parsial adalah $\psi(z_\alpha) = \phi(z_\alpha) - z_\alpha\cdot\alpha$. Dengan menggunakan notasi Bahagia [1] ini, persamaan (4) dapat dinyatakan sebagai $N = \sigma\psi(z_\alpha)$. Karena σ = s_L, persamaan terakhir ini dapat dinyatakan sebagai berikut.

$N = s_L\psi(z_\alpha)$ .... (5)

Tetapi, di halaman 136, Bahagia [1] menyatakan $N = s_L[f(z_\alpha) - z_\alpha\psi(z_\alpha)]$. Ini perlu dikoreksi menjadi $N = s_L\psi(z_\alpha)$.

Berikut ini akan dilakukan pendekatan yang bertitik tolak dari karya Hadley dan Whitin [2] untuk menentukan ekspektasi banyaknya kekurangan persediaan selama *lead time*. Persamaan (4-15) di halaman 167 buku tersebut menyatakan sebagai berikut.

$\int_r^\infty xh(x)dx = \sigma\phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) + \mu\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)$ .... (6)

dengan *r* adalah *reorder point* dan *h* adalah fungsi densitas peluang normal dengan rata-rata μ dan simpangan baku σ. Fungsi Φ itu sendiri di buku tersebut didefinisikan sebagai $\Phi(w) = \int_w^\infty \phi(y)\, dy$.

Dengan berpangkal pada (6), ekspektasi banyaknya kekurangan persediaan selama *lead time*, *N*, diperoleh dengan cara sebagai berikut.

$$\int_r^\infty xh(x)dx = \int_r^\infty xn(x;\mu,\sigma)dx$$
$$= \sigma\phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) + \mu\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)$$
$$N = \int_r^\infty (x-r)n(x;\mu,\sigma)dx$$
$$= \sigma\phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) + \mu\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - r\int_r^\infty n(x;\mu,\sigma)dx$$
$$N = \sigma\phi(z_\alpha) + \mu\Phi(z_\alpha) - r\int_{z_\alpha}^\infty \phi(z)dz$$
$$N = \sigma\phi(z_\alpha) + \mu\alpha - r\alpha = \sigma\phi(z_\alpha) + (\mu - r)\alpha$$

Karena $\frac{r-\mu}{\sigma} = z_\alpha$, selisih antara rata-rata banyaknya permintaan selama *lead time* dengan *reorder point* adalah $\mu - r = -z_\alpha\sigma$. Dengan demikian *N* dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$N = \sigma\phi(z_\alpha) - z_\alpha\sigma\alpha = \sigma[\phi(z_\alpha) - z_\alpha\alpha] \quad \text{.......... (7)}$$

Dengan mengkonversi lambang-lambang yang digunakan dalam (7) menjadi lambang-lambang yang digunakan oleh Bahagia [1], persamaan (7) dapat dinyatakan sebagai $N = s_L\psi(z_\alpha)$, yang tidak lain adalah persamaan (5), yaitu hasil yang diperoleh melalui pendekatan yang bertitik tolak pada proposisi Bahagia [1] seandainya penurunan rumusnya dilakukan dengan benar.

Dari seluruh uraian di atas, tampak bahwa jika evaluasi integral dalam (1) sebagaimana dinyatakan dinyatakan dalam Bahagia [1] dilakukan dengan benar, maka hasil yang diperoleh identik dengan hasil yang diperoleh apabila penurunan rumus bertitik tolak pada proposisi (6) yang terdapat dalam Hadley dan Whitin [2]. Keduanya menghasilkan $N = s_L\psi(z_\alpha)$, bukan $N = s_L[f(z_\alpha) - z_\alpha\psi(z_\alpha)]$ sebagaimana dinyatakan Bahagia [1]. Perlu ditambahkan juga di sini, yaitu bahwa sebenarnya Bahagia [1] sudah menyatakan *N* dengan benar di persamaan (7-2) buku tersebut, yaitu $N = s_L[f(z_\alpha) - z_\alpha\Psi(z_\alpha)]$. Di buku tersebut $\Psi(z_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_\alpha}^\infty e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$. Dari definisi α dan makna z_α dalam buku tersebut, diperoleh bahwa $\Psi(z_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_\alpha}^\infty e^{-\frac{1}{2}z^2}dz = \alpha$. Dengan mensubstitusikan hasil ini ke dalam persamaan (7-2) buku tersebut, diperoleh $N = s_L[f(z_\alpha) - z_\alpha \cdot \alpha]$, yang tidak lain adalah (7) apabila dalam (7) digunakan lambang-lambang yang.digunakan dalam Bahagia [1]. Dari uraian ini tampak bahwa Bahagia [1] mempersamakan α dengan $\psi(z_\alpha) = \phi(z_\alpha) - z_\alpha \cdot \alpha$ sebagaimana nilai-nilainya terdapat dalam Tabel B buku tersebut, padahal α dan $\psi(z_\alpha)$ berbeda makna.

4. KESIMPULAN

Dari uraian di atas, diperoleh bahwa ekspektasi banyaknya kekurangan persediaan selama *lead time* adalah $N = s_L\psi(z_\alpha)$, dengan s_L adalah simpangan baku permintaan selama *lead time* dan $\psi(z_\alpha) = \phi(z_\alpha) - z_\alpha \cdot \alpha$. Dalam formulasi ini, ϕ adalah fungsi densitas peluang normal baku, α adalah peluang terjadinya *shortage* selama *lead time*, dan z_α adalah nilai z sedemikian hingga $\int_{z_\alpha}^\infty \phi(z)dz = \alpha$.

5. REFERENSI

[1]Bahagia, S. N. Sistem Inventori. *Penerbit ITB.* Bandung. 2006.

[2]Hadley, G. and Whitin, T. M. Analysis of Inventory Systems. *Prentice-Hall, Inc.* New York. 1963.

[3] Lati, G.M. dan Altavia, N. N. Pengendalian Biaya Persediaan Metoclopramide HCl di PT ZZZ Menggunakan Metode Economic Order Quantity (EOQ) Probabilistik. *Jurnal Logistik Bisnis*. 2022; Vol. 12 (2): 94-102.

[4] Setiadi, H. dan Raihan, S.N. Penerapan Kebijakan Persediaan Bahan Baku Kain Twist Menggunakan Metode EOQ Probabilistik Sederhana di PT Multi Garmenjaya. *Jurnal Logistik Bisnis*. 2020; Vol. 10 (2): 60-63.

[5]Fayaqun, R., 2019. Analisis Pengendalian Persediaan Barang Yang Optimal Menggunakan Metode Probabilistik Countinous Review (S, S)(Studi Kasus Di PT Parahyangan Motor Perkasa). Jurnal Logistik Bisnis, 9(02), pp.97-104.

[6]Syamil et. al. Penentuan Kebijakan Persediaan Produk Kategori Food dan Non-food Menggunakan Continuous Review (s,S) System dan (s,Q) System di PT XYZ untuk Oprimasi Biaya Persediaan. *Jurnal Integrasi Sistem Industri UMJ*. 2018; Vol. 05 (1)