MODEL PERSEDIAAN BARANG MENGUSANG DENGAN PERMINTAAN MENINGKAT DAN BACKLOGGING PER BAGIAN

Eduard Sondakh[1)]
[1)] Program Studi D3 Administrasi Logistik, Universirtas Logistik dan Bisnis Internasional
Email: eduard@ulbi.ac.id

Abstrak

Model dalam penelitian ini berupaya untuk menjawab berapa banyak barang yang dipesan dalam tiap kali pemesanan dan selang waktu antarpemesanan agar dicapai total biaya persediaan yang minimum. Barang dalam model ini mengalami pengusangan atau perusakan secara kontinu, di mana untuk setiap saat barang yang mengusang adalah sebanyak suatu proporsi yang konstan dari sisa barang persediaan. Permintaan terhadap barang ini memuat suatu trend linier. Model ini juga memperkenankan backlogging sebagian-sebagian. Solusi yang diberikan merupakan solusi terbuka. Dengan solusi tersebut diperoleh kuantitas pemesanan yang menghasilkan biaya minimum.

Kata Kunci: ***pengusangan, backlogging, kuantitas pemesanan optimal***

1. PENDAHULUAN

Model persediaan yang melibatkan keusangan barang persediaan bukan merupakan hal yang baru. Model ini dipelopori oleh Hadlley&Whitin (1963) untuk barang jenis busana. Seiring perkembangan zaman, cukup banyak peneliti mengembangkan model ini. Beberapa penelitian yang berhasil ditemukan di bidang ini misalnya penelitian oleh Ouyang, Wu&Cheng (2005), Caliskan (2021), dan Samanta (2022). Ouyang, Wu&Cheng (2005) melibatkan keusangan barang dengan permintaan yang meluruh secara eksponensial dan melibatkan *backlogging* secara parsial. Caliskan (2021) memberikan solusi tertutup bagi model persediaan dengan barang mengusang dan biaya kesempatan yang hilang yang dibungakan secara majemuk. Samanta (2022) mengembangkan model persediaan dengan memperhitungkan pengusangan dan pemotongan harga.

Penelitian ini berbeda dengan penelitian-penelitian sebelumnya dalam hal fungsi permintaan dan proporsi *backlogging*-nya. Dalam penelitian ini, permintaan diasumsikan mengandung *trend* meningkat secara linier, sedangkan proporsi *bakclogging*-nya lebih umum daripada penelitian Samanta (2022). Khususnya, proporsi *backlog* dalam penelitian ini memiliki bentuk $[\Omega + \delta(T - t)]^{-1}$ sebagaimana diuraikan lebih rinci di bagian berikutnya.

2. METODE PENELITIAN

Asumsi-asumsi model ini adalah: 1) permintaan terhadap produk memuat trend linier, 2) laju pengusangan berbanding lurus dengan total banyaknya persediaan, 3) selama masa kekurangan, laju *backlogging* merupakan fungsi dari lamanya waktu tunggu hingga persediaan diisi kembali, 4) pengisian kembali dilakukan sekaligus pada satu waktu.

Penelitian ini dilakukan dengan beberapa tahap. Setelah menetapkan pertanyaan penelitian, Peneliti membangun fungsi objektif, dalam hal ini adalah biaya total per siklus per siklus pemesanan. Biaya tersebut memuat beberapa komponen, yaitu biaya simpan, biaya kekurangan, biaya kesempatan yang hilang, biaya keusangan barang, dan biaya pemesanan per siklus. Setelah itu, Peneliti membuat formulasi matematis untuk masing-masing komponen tersebut. Tahap terakhir berupa penerapan langkah-langkah optimasi agar fungsi objektif tersebut minumum.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan asumsi mengenai permintaan, misalkan permintaan terhadap barang tersebut dinyatakan dalam persamaan $D(t) = m + nt$ dengan $m > 0$ dan $n \neq 0$. Selanjutnya, asumsi mengenai pengusangan menyarankan bahwa laju pengusangan adalah sebesar $\theta I(t)$ untuk suatu θ yang memenuhi $0 < \theta < 1$, dengan $I(t)$ adalah banyaknya persediaan pada saat t. Untuk laju *backlogging*, Peneliti menggunakan $\frac{1}{\Omega+\delta(T-t)}$ untuk suatu $\Omega, \delta > 0$. Bentuk ini merupakan bentuk yang lebih umum daripada yang digunakan dalam Singh dan Pattanayak (2014).

Biaya Simpan Per Siklus

Komponen biaya ini tergantung dari banyaknya persediaan di tempat penyimpanan. Total banyaknya persediaan, dilambangkan dengan I, bersifat variabel dari waktu ke waktu. Jadi, $I = I(t)$. Berkurangnya persediaan di sini adalah sebagai akibat adanya permintaan dan persediaan yang mengalami keusangan. Dalam hal laju permintaan, model ini mengasumsikan permintaan memiliki *trend* linier sehingga permintaan dapat dinyatakan dalam bentuk $D(t) = m + nt$. Dalam hal banyaknya barang yang mengalami keusangan, asumsi model menyatakan bahwa banyaknya barang yang mengusang berbanding lurus dengan total banyaknya persediaan. Jadi, laju pertambahan banyaknya barang yang mengusang, $K(t)$, dapat dinyatakan sebagai $K(t) = \theta I(t)$ dengan θ adalah suatu konstanta yang menyatakan proporsi barang yang usang di antara total banyaknya persediaan. Berdasarkan uraian di atas, laju perubahan atau berkurangnya persediaan, $\frac{dI}{dt}$, dapat dinyatakan sebagai $\frac{dI}{dt} = -D(t) - K(t)$. Dengan menyulihkan $D(t) = m + nt$ dan $K(t) = \theta I(t)$ ke dalam persamaan diferensial tersebut dan melakukan manipulasi aljabar yang diperlukan, diperolehlah persamaan berikut.

$$(m + nt + \theta I)\, dt + dI = 0 \quad \text{.................................} (1)$$

Untuk menyelesaikan persamaan tersebut, digunakan *integrating factor* $F = e^{\theta t}$, sehingga (1) menjadi:

$$(m + nt + \theta I)e^{\theta t}\, dt + e^{\theta t}\, dI = 0 \quad \text{.....................} (2)$$

Dapat ditunjukkan bahwa $\frac{\partial\left((m+nt+\theta I)e^{\theta t}\right)}{\partial I} = \frac{\partial(e^{\theta t})}{\partial t} = \theta e^{\theta t}$ sehingga (2) merupakan persamaan diferensial eksak. Jadi, solusi bagi (2) memiliki bentuk $u(t, I) = c$ untuk suatu fungsi u dan konstanta c. Selanjutnya, $u(t, I) = \int e^{\theta t} dI + r(t)$ untuk suatu fungsi dari r yang hanya tergantung variabel t. Dengan mengevaluasi intergral tersebut, diperoleh $u(t, I) = e^{\theta t} I + r(t)$. Untuk menentukan $r(t)$, turunkan $u(t, I)$ terhadap t, dan terapkan persamaan $\frac{\partial I(u,t)}{\partial t} = (m + nt + \theta I)e^{\theta t}$. Ini menghasilkan $\theta e^{\theta t} I + r'(t) = (m + nt + \theta I)e^{\theta t}$. Dengan menerapakan hukum pencoretan diperoleh $r'(t) = (m + nt)e^{\theta t}$. Integrasi terhadap persamaan tersebut menghasilkan fungsi r sebagai berikut.

$$r(t) = \left(\frac{m+nt}{\theta} - \frac{n}{\theta^2}\right)e^{\theta t} + C \quad \text{...............................} (3)$$

Pada persamaan (3), C suatu konstanta. Jadi, $u(t, I) = e^{\theta t} I + \left(\frac{m+nt}{\theta} - \frac{n}{\theta^2}\right)e^{\theta t} + C$ dan, karena $u(t, I) = c$, terbentuklah persamaan $e^{\theta t} I + \left(\frac{m+nt}{\theta} - \frac{n}{\theta^2}\right)e^{\theta t} + C = c$. Karena C maupun c keduanya konstanta, persamaan tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$e^{\theta t} I + \left(\frac{m+nt}{\theta} - \frac{n}{\theta^2}\right)e^{\theta t} = d \quad \text{...............................} (4)$$

untuk suatu konstanta d. Langkah selanjutnya adalah menentukan nilai d. Jika kekurangan mulai terjadi pada saat $t = t_k$ maka berlaku $I(t_k) = 0$. Jadi, $d = \left(\frac{m+nt_k}{\theta} - \frac{n}{\theta^2}\right)e^{\theta t_k}$. Dengan menyulihkan hasil ini ke dalam (4) dan dilanjutkan dengan manipulasi aljabar, diperolehlah $I(t)$ sebagai berikut.

$$I(t) = \frac{n}{\theta^2} - \frac{m+nt}{\theta} + \left(\frac{m+nt_k}{\theta} - \frac{n}{\theta^2}\right)e^{\theta(t_k - t)} \quad \text{..........} (5)$$

untuk $0 \leq t \leq t_k$. Selanjutnya, akan dihitung biaya penyimpanan per siklus persediaan, B_s. Apabila biaya penyimpanan per unit per satuan waktu dinyatakan dengan C_s maka biaya penyimpanan tersebut dapat dihitung dengan $B_s = C_s \int_0^{t_k} I(t)\, dt = C_s \int_0^{t_k} \left[\frac{n}{\theta^2} - \frac{m+n}{\theta} + \left(\frac{m+nt_k}{\theta} - \frac{n}{\theta^2}\right)e^{\theta(t_k - t)}\right] dt$ dan ini menghasilkan persamaan berikut.

$$B_s = C_s\left[\frac{n}{\theta^3} - \frac{m}{\theta^2} - \frac{2mt_k + nt_k^2}{2\theta} + \left(\frac{m+nt_k}{\theta^2} - \frac{n}{\theta^3}\right)e^{\theta t_k}\right] \quad \text{.......} (6)$$

Biaya kekurangan per siklus

Jika T menyatakan selang waktu antarpemesanan maka kekurangan barang terjadi pada selang waktu $t_k \leq t \leq T$. Selama masa ini, permintaan yang tidak terpenuhi dikenakan *backlog* sebagian-sebagian dengan proporsi sebesar $[\Omega + \delta(T-t)]^{-1}$ untuk suatu $\Omega > 0$ dari banyaknya permintaan di awal terjadinya kekurangan persediaan, D_k. Jadi, pada masa tersebut berlaku persamaan diferensial berikut.

$$\frac{dI}{dt} = -D_k[\Omega + \delta(T-t)]^{-1} \quad (7)$$

Penyelesaian bagi (7) dengan kondisi batas $I(t_k) = 0$ memberikan hasil sebagai berikut.

$$I(t) = \frac{D_k}{\delta}\ln\frac{\Omega+\delta(T-t)}{\Omega+\delta(T-t_k)} \quad (8)$$

Perhatikan bahwa nilai pada (8) tersebut nonpositif karena $t_k \leq t$. Untuk menghitung biaya kekurangan yang terjadi pada periode tersebut, B_k, misalkan biaya kekurangan per unit per satuan waktu adalah C_k. Dengan demikian B_k dapat ditentukan sebagai berikut.

$$B_k = C_k\int_{t_k}^{T}|I(t)|\,dt = C_k\int_{t_k}^{T}\left|\frac{D_k}{\delta}\ln\frac{\Omega+\delta(T-t)}{\Omega+\delta(T-t_k)}\right|dt = C_k\int_{t_k}^{T}\frac{D_k}{\delta}\ln\frac{\Omega+\delta(T-t_k)}{\Omega+\delta(T-t)}\,dt \quad (9)$$

Solusi bagi (9) adalah sebagai berikut.

$$B_k = \frac{C_kD_k}{\delta}\left[T - t_k - \frac{\Omega}{\delta}\ln\left(1+\frac{\delta}{\Omega}(T-t_k)\right)\right] \quad (10)$$

Biaya kesempatan yang hilang per siklus

Biaya kesempatan yang hilang, B_o, timbul karena *lost sales*. Misalkan C_o adalah biaya kesempatan yang hilang per unit. Dengan demikian B_o dapat dinyatakan sebagai $B_o = C_o\int_{t_k}^{T}\left[D_k\left(1-e^{\delta(t-T)}\right)\right]dt$. Integral tentu tersebut menghasilkan persamaan berikut.

$$B_o = C_oD_k\left[T - t_k - \frac{1}{\delta}\ln\left(1+\frac{\delta}{\Omega}(T-t_k)\right)\right] \quad (11)$$

Biaya keusangan barang per siklus

Banyaknya persediaan maksimum dalam setiap siklus adalah sebagai berikut.

$$I_{max} = I(0) = \frac{n}{\theta^2} - \frac{m}{\theta} + \left(\frac{m+nt_k}{\theta} - \frac{n}{\theta^2}\right)e^{\theta t_k} \quad (12)$$

Akibatnya biaya keusangan per siklus, B_u, dapat dinyatakan sebagai $B_u = C_u\left[I_{max} - \int_0^{t_k}(m+nt)dt\right]$, dengan C_u adalah harga barang per unit. Ini menghasilkan persamaan sebagai berikut.

$$B_u = C_u\left[\frac{n}{\theta^2} - \frac{m}{\theta} + \left(\frac{m+nt_k}{\theta} - \frac{n}{\theta^2}\right)e^{\theta t_k} - mt_k - \frac{1}{2}nt_k^2\right] \quad (13)$$

Optimasi biaya per siklus/siklus pemesanan

Dari persamaan (6), (10), (11), (13) dibentuk fungsi objektif dalam model ini, yaitu biaya total per siklus per siklus pemesanan, B_T, yang dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$B_T = \frac{B_s}{T} + \frac{B_k}{T} + \frac{B_o}{T} + \frac{B_u}{T} + \frac{C_p}{T} \quad (14)$$

Pada persamaan (14), C_p menyatakan biaya yang dikeluarkan dalam setiap kali pemesanan. Persamaan tersebut dapat juga dinyatakan sebagai berikut.

$$B_T = \frac{\left(C_u+\frac{C_s}{\theta}\right)\left[\frac{n}{\theta^2}-\frac{m}{\theta}-mt_k-\frac{1}{2}nt_k^2+\left(\frac{m+nt_k}{\theta}-\frac{n}{\theta^2}\right)e^{\theta t_k}\right]}{T} + \frac{\frac{C_kD_k}{\delta}\left[T-t_k-\frac{\Omega}{\delta}\ln\left(1+\frac{\delta}{\Omega}(T-t_k)\right)\right]}{T} + \frac{C_oD_k\left[T-t_k-\frac{1}{\delta}\ln\left(1+\frac{\delta}{\Omega}(T-t_k)\right)\right]}{T} + \frac{C_p}{T} \quad (15)$$

Selanjutnya $\frac{\partial B_T}{\partial t_k} = 0$ dan $\frac{\partial B_T}{\partial T} = 0$ untuk menentukan nilai-nilai stasioner fungsi tersebut. Dapat ditunjukkan bahwa $\frac{\partial B_T}{\partial t_k} = 0$ menghasilkan persamaan berikut.

$$\left[\left(\frac{C_s}{\theta}+C_u\right)(m+nt_k)\right]\left(e^{\theta t_k}-1\right) = \frac{D_k(\Omega C_k+\delta C_o)(T-t_k)}{\Omega+\delta(T-t_k)} \quad (16)$$

Persamaan $\frac{\partial B_T}{\partial T} = 0$ menghasilkan persamaan berikut.

$$B_T[\Omega+\delta(T-t_k)] = D_k(\Omega C_k+\delta C_o)(T-t_k) \quad (17)$$

Dengan analisis numerik solusi sistem persamaan (16) dan (17) dapat diperoleh. Selanjutnya, agar nilai B_T yang dicapai minimum, berlaku syarat cukup

$\frac{\partial^2(T_B)}{\partial t_k^2} > 0$, $\frac{\partial^2(T_B)}{\partial T^2} > 0$, dan $\frac{\partial^2(T_B)}{\partial t_k^2} \cdot \frac{\partial^2(T_B)}{\partial T^2} - \left(\frac{\partial^2(T_B)}{\partial t_k\, \partial T}\right)^2 > 0$.

Perhitungan kuantitas pemesanan optimal

Misalkan solusi serempak (16) dan (17) adalah $t_k = t_k^*$ dan $T = T^*$. Dari persamaan (6), (10), (11), (13) dibentuk fungsi objektif dalam model ini, yaitu biaya total per siklus per siklus pemesanan, B_T, yang dapat dinyatakan sebagai berikut.

Maksimum banyaknya barang yang di-*backlog* dalam tiap siklus, *S*, adalah sebagai berikut.

$$S = |I(T)| = \frac{D_k}{\delta} \cdot \ln\left(1 + \frac{\delta}{\Omega}(T - t_k)\right) \quad (18)$$

Persamaan (18) diperoleh dengan cara menyulihkan $t = T$ ke dalam (8). Selanjutnya perhatikan bahwa banyaknya kuantitas yang dipersan dalam tiap siklus pemesanan adalah $Q = I_{max} + S$, sehingga Q dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$Q = \frac{n}{\theta^2} - \frac{m}{\theta} + \left(\frac{m+nt_k}{\theta} - \frac{n}{\theta^2}\right) e^{\theta t_k} + \frac{D_k}{\delta} \cdot \ln\left(1 + \frac{\delta}{\Omega}(T - t_k)\right) \quad (19)$$

Selanjutnya, diperoleh kuantitas pemesanan optimal untuk model ini, Q^*, yaitu sebagai berikut.

$$Q^* = \frac{n}{\theta^2} - \frac{m}{\theta} + \left(\frac{m+nt_k^*}{\theta} - \frac{n}{\theta^2}\right) e^{\theta t_k^*} + \frac{D_k}{\delta} \cdot \ln\left(1 + \frac{\delta}{\Omega}(T^* - t_k^*)\right) \quad (20)$$

4. KESIMPULAN

Model ini tidak memberikan solusi tertutup bagi waktu optimal dimulainya masa kekurangan barang dan selang waktu optimal siklus pemesanan. Solusi bagi keduanya diperoleh dengan menerapkan analisis numerik dalam penyelesaian sistem persamaan nonlinier dengan dua variabel. Dengan diperolehnya solusi tersebut, kuantitas pemesanan optimal adalah sebesar $Q^* = \frac{n}{\theta^2} - \frac{m}{\theta} + \left(\frac{m+nt_k^*}{\theta} - \frac{n}{\theta^2}\right) e^{\theta t_k^*} + \frac{D_k}{\delta} \cdot \ln\left(1 + \frac{\delta}{\Omega}(T^* - t_k^*)\right)$, dengan t_k^* dan T^* keduanya adalah solusi optimal yang diperoleh dengan analisis numerik, yaitu solusi bagi sistem persamaan (16) dan (17). Rekomendasi pengembangan penelitian yang dapat dilakukan kemudian adalah untuk menemukan solusi tertutup bagi sistem persamaan tersebut.

5. REFERENSI

Caliskan, C. An Inventory Ordering Model for Deteriorating Items with Compounding and Backordering. *Symmetry*. 2021; Vol. 13: 1078. https://doi.org/10.3390/sym13061078

Hadley, G. and Whitin, T. M. Analysis of Inventory Systems. *Prentice-Hall, Inc.* New York. 1963.

Ouyang, Wu&Cheng. An Inventory Model for Deteriorating Items with Exponential Declining Demand and Partial Backlogging. *Yugoslav Journal of Operations Research*. 2005; Vol. 15 (2): 277-288. DOI.10.2298/YJOR0502277O

Samanta, A. Inventory Model for Non-instantaneous Deteriorating Items with Time-dependent Deterioration Rate and Price Discounts. *Calcutta Statistical Association Bulletin*. 2022; Vol. 74(1): 62-72. DOI. 10.1177/00080683221096931