

MODEL EOQ PROBABILISTIK MULTI-ITEM DENGAN KETERBATASAN LAHAN PENYIMPANAN

Eduard Sondakh¹⁾

¹⁾ Program Studi D3 Administrasi Logistik, Universitas Logistik dan Bisnis Internasional
email: eduard@ulbi.ac.id

Abstrak

Penelitian ini mengembangkan model Economic Order Quantity (EOQ) probabilistik untuk beberapa item dengan keterbatasan ruang penyimpanan. Sementara penelitian sebelumnya membahas model persediaan probabilistik dan model persediaan multi-item secara terpisah, penelitian ini mengintegrasikan kedua elemen dan memperkenalkan keterbatasan lahan penyimpanan sebagai kendala. Model dalam penelitian ini mengasumsikan permintaan tahunan yang berdistribusi normal untuk setiap item, dengan rata-rata dan simpangan baku tertentu. Dengan metode pengali Lagrange, penelitian ini menghasilkan kuantitas pesanan yang meminimumkan total biaya persediaan dalam setahun. Selain itu, model yang dihasilkan juga menentukan besarnya safety stock dan reorder point bagi setiap item.

Kata Kunci: *EOQ probabilistik, keterbatasan lahan, multi-item.*

1. PENDAHULUAN

Pengelolaan persediaan dalam perusahaan manufaktur merupakan suatu hal yang penting dipelajari. Sebagaimana yang dikemukakan oleh Annadurai dan Uthayakumar [2], pengelolaan persediaan yang baik seringkali menjadi ciri organisasi yang terkenal. Tingkat persediaan harus direncanakan dengan hati-hati untuk menyeimbangkan biaya dan tingkat pelayanan yang baik. Selain itu, bagaimana persediaan dikelola memengaruhi keuntungan perusahaan. Reyes, et. al. [3] menyatakan bahwa manajemen persediaan yang efisien sangat penting bagi perusahaan besar dan perusahaan *retail* karena secara langsung memengaruhi profitabilitas. Dalam penelitian ini Penulis mengembangkan model probabilistik sederhana dalam Bahagia [6] untuk kasus multi-item dan kendala keterbatasan lahan penyimpanan.

Adanya penelitian yang intensif dan terbaru di bidang ini dapat diperoleh dari beberapa penelitian berikut. Alshanbari [1] membangun model persediaan probabilistik dengan sistem *periodic review* dengan kendala. Dalam modelnya, ia meminimumkan rata-rata biaya total dengan

kendala linier maupun nonlinier. Bersamaan dengan itu, ia menentukan nilai optimal bagi tingkat persediaan maksimum.

Selanjutnya, Rezaei dan Davoodi [4] menentukan strategi pengadaan optimal untuk beberapa macam produk dan beberapa pemasok. Dalam model yang dibangunnya, permintaan diasumsikan deterministik dan masalahnya dirumuskan dengan *mixed integer programming*. Solusi optimal diperoleh dengan algoritma genetik. Selain itu, Annadurai dan Uthayakumar [2] membahas model persediaan dengan biaya pemesanan yang beragam dan menyoroiti dampak *lead time* dan reduksi *lost sales*. Dalam model tersebut, permintaan bersifat probabilistik, namun hanya melibatkan sebuah item. Pada penelitian tersebut, tidak ada kendala berupa keterbatasan lahan penyimpanan.

Penelitian ini mengkombinasikan model permintaan yang probabilistik dan melibatkan lebih dari satu buah item. Hal ini tidak didapatkan pada penelitian-penelitian yang diuraikan sebelumnya. Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan kuantitas pemesanan optimal masing-masing item dengan kendala pada lahan penyimpanan.

Selain itu, penelitian ini akan menghasilkan besarnya *safety stock* masing-masing item beserta *reorder point*-nya.

2. METODE PENELITIAN

Dalam penelitian ini, Penulis menggunakan asumsi model sebagai berikut.

1. Terdapat m buah item yang harus dikelola, yaitu item 1, item 2, item 3, ..., item m .
2. Banyaknya permintaan tahunan terhadap item i , dilambangkan dengan D_i , berdistribusi normal dengan rata-rata D_i dan simpangan baku σ_i .
3. Ukuran lot pemesanan bagi item i , dilambangkan dengan Q_i , bersifat tetap dalam tiap pemesanan.
4. *Lead time* bagi item i konstan, sebesar L_i .
5. Biaya pembelian tiap unit item tidak tergantung dari banyaknya barang yang dibeli maupun saat terjadinya pembelian.
6. Dalam tiap kali pemesanan, *setup cost* bagi item i bersifat tetap, sebesar A_i .
7. Biaya simpan per item i per lamanya waktu penyimpanan bersifat tetap, sebesar h_i .
8. Biaya yang timbul akibat kekurangan per item i tetap, sebesar π_i .
9. Besarnya peluang terjadi kekurangan persediaan selama *lead time* ditetapkan sebesar α .
10. Semua item diletakkan pada suatu lahan yang terbatas, dengan total luas lahan sebesar K .
11. Untuk setiap unit item i , diperlukan lahan penyimpanan seluas k_i .

Dengan menggunakan asumsi di atas, Peneliti mengidentifikasi komponen-komponen biaya terkait model, yaitu biaya pemesanan, biaya penyimpanan, dan biaya kekurangan dan selanjutnya menyatakannya secara matematis. Langkah selanjutnya adalah memformulasikan biaya total tahunan dan dengan kaidah optimasi dalam kalkulus multivariabel, Penulis mencari solusi yang meminimumkan biaya total tersebut.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Total biaya persediaan selama setahun terdiri dari biaya pembelian, biaya pemesanan, biaya simpan, dan biaya kekurangan persediaan. Karena biaya pembelian per item tetap, dalam minimasi total biaya persediaan per tahun, Penulis tidak menjadikan biaya pembelian sebagai salah satu suku dalam total biaya persediaan tahunan.

Untuk item i , jika banyaknya item yang dipesan adalah sebanyak Q_i dalam tiap pemesanan maka dalam satu tahun terdapat n_i kali pemesanan, dengan $n_i = \frac{D_i}{Q_i}$. Jadi, total biaya pemesanan item i selama setahun adalah $\frac{D_i}{Q_i} \cdot A_i$ dan total biaya pemesanan semua item dalam setahun adalah sebagai berikut.

$$C_p = \sum_{i=1}^m \frac{A_i D_i}{Q_i} \dots\dots\dots (1)$$

Dalam Bahagia [6], biaya simpan dalam model probabilistik sederhana merupakan hasil kali antara biaya simpan per item per lamanya waktu penyimpanan dengan penjumlahan antara rata-rata *inventory level* dan *safety stock*-nya sehingga total biaya penyimpanan untuk seluruh item dalam setahun adalah sebagai berikut.

$$C_s = \sum_{i=1}^m h_i \left(\frac{Q_i}{2} + s_i \right) \dots\dots\dots (2)$$

Dalam (2), s_i adalah *safety stock* untuk item i . Misalkan ϕ adalah fungsi densitas peluang distribusi normal baku dan z_α memenuhi $\int_{z_\alpha}^{\infty} \phi(z) dz = \alpha$. Dengan pendefinisian z_α dengan cara tersebut, *safety stock* (s_i) dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$s_i = z_\alpha \cdot \sigma_i \sqrt{L_i} \dots\dots\dots (4)$$

Biaya kekurangan persediaan selama horison perencanaan bagi item i merupakan hasil kali rata-rata banyaknya persediaan yang mengalami kekurangan selama horison perencanaan (dilambangkan dengan N_i) dengan biaya yang timbul akibat kekurangan per item (π_i). Jadi, total biaya kekurangan semua item dalam setahun adalah sebagai berikut.

$$C_k = \sum_{i=1}^m \frac{\pi_i D_i N_i}{Q_i} \dots\dots\dots (5)$$

Pada (5), N_i dihitung dengan menggunakan *normal loss function*. Sondakh [5] telah melakukan koreksi untuk penentuan rata-rata banyaknya kekurangan persediaan selama *lead time* sebagai berikut: $N = s_L \psi(z_\alpha)$, dengan s_L adalah simpangan baku permintaan selama *lead time* dan ψ adalah *normal loss function*. Jadi, pada (5), $N_i = \sigma_i \sqrt{L_i} \cdot \psi(z_\alpha)$ dengan z_α adalah nilai z sedemikian hingga $\int_{z_\alpha}^{\infty} \phi(z) dz = \alpha$ dan ϕ adalah fungsi densitas peluang normal baku.

Dari (1), (2), dan (3), total biaya persediaan dalam setahun (C) merupakan penjumlahan antara C_p , C_s , dan C_k , sehingga total biaya persediaan dalam setahun dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$C = \sum_{i=1}^m \frac{A_i D_i}{Q_i} + \sum_{i=1}^m h_i \left(\frac{Q_i}{2} + s_i \right) + \sum_{i=1}^m \frac{\pi_i D_i N_i}{Q_i} \dots\dots\dots (4)$$

Karena terdapat kendala luas lahan, masalah ini dapat dirumuskan sebagai berikut.

Minimumkan:

$$C(Q_1, Q_2, \dots, Q_m) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i D_i}{Q_i} + \sum_{i=1}^m h_i \left(\frac{Q_i}{2} + s_i \right) + \sum_{i=1}^m \frac{\pi_i D_i N_i}{Q_i}$$

dengan kendala $\sum_{i=1}^m k_i Q_i \leq K$ dan $Q_i > 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, m$.

Untuk setiap $i = 1, 2, \dots, m$, solusi optimal bagi Q_i diperoleh dengan menyelesaikan $\frac{\partial C}{\partial Q_i} = 0$. Solusi bagi persamaan ini adalah sebagai berikut.

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2D_i(A_i + \pi_i N_i)}{h_i}} \dots\dots\dots (5)$$

Dalam hal ini terdapat dua kemungkinan. Kemungkinan pertama adalah K sedemikian besarnya sehingga $\sum_{i=1}^m k_i Q_i^* \leq K$. Dalam kasus seperti ini, (5) merupakan solusi bagi masalah optimasi di atas. Yang menjadi signifikansi penelitian ini justru apabila dengan (5) tadi, terjadi pelanggaran kendala. Dalam hal ini, Penulis akan melakukan minimasi C dengan kendala $\sum_{i=1}^m k_i Q_i = K$. Ini dibenarkan karena C bersifat cembung (konveks) dan hanya terdapat satu buah kendala linier, yang menjadikannya ruang solusi yang cembung.

Untuk menentukan solusi dengan kendala tersebut, Penulis menggunakan metode pengali Lagrange. Fungsi Lagrange terkait untuk masalah ini adalah sebagai berikut.

$$\mathcal{L}(Q_1, Q_2, \dots, Q_m, \lambda) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i D_i}{Q_i} + \sum_{i=1}^m h_i \left(\frac{Q_i}{2} + s_i \right) + \sum_{i=1}^m \frac{\pi_i D_i N_i}{Q_i} - \lambda (\sum_{i=1}^m k_i Q_i - K) \dots\dots\dots (6)$$

Pada (6), λ adalah pengali Lagrange dengan $\lambda < 0$. Solusi optimal bagi (6) diperoleh dengan cara menyelesaikan secara simultan $(m+1)$ buah persamaan sebagai berikut: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$ dan $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, m$.

Dari $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$, diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\sum_{i=1}^m k_i Q_i - K = 0 \dots\dots\dots (7)$$

Selanjutnya, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = 0$, memberikan solusi bagi Q_i sebagai berikut.

$$Q_i = \sqrt{\frac{2D_i(A_i + \pi_i N_i)}{h_i - 2k_i \lambda}} \dots\dots\dots (8)$$

Nilai optimal Q_i , yaitu $(Q_i)^*$, dan nilai optimal λ , yaitu λ^* , tentunya harus memenuhi (7) dan (8) secara simultan. Jadi, harus berlaku $\sum_{i=1}^m k_i Q_i^* - K = 0$ dan $Q_i^* =$

$\sqrt{\frac{2D_i(A_i + \pi_i N_i)}{h_i - 2k_i \lambda^*}}$ untuk $i = 1, 2, \dots, m$. Solusi optimal ini dapat diselesaikan dengan metode numerik.

Selanjutnya, *reorder point*, sebagaimana dinyatakan dalam Bahagia [6], adalah penjumlahan antara rata-rata permintaan selama *lead time* dengan *safety stock*-nya. Dengan demikian, untuk item i adalah sebagai berikut.

$$R_i = L_i D_i + z_\alpha \cdot \sigma_i \sqrt{L_i} \dots\dots\dots (9)$$

4. KESIMPULAN

Penelitian ini mengembangkan model probabilistik multi-item dalam pengelolaan persediaan dengan mempertimbangkan keterbatasan lahan penyimpanan. Dengan asumsi-asumsi yang telah ditentukan sebelumnya, penelitian ini menghasilkan kuantitas pemesanan optimal item i sebesar $Q_i^* = \sqrt{\frac{2D_i(A_i + \pi_i N_i)}{h_i - 2k_i \lambda^*}}$, dengan $\sum_{i=1}^m k_i Q_i^* - K = 0$. Penelitian ini juga menghitung *safety stock* dan *reorder point* untuk masing-masing item i , yaitu, secara berturut-turut sebesar $s_i = z_\alpha \cdot \sigma_i \sqrt{L_i}$ dan $R_i = L_i D_i + z_\alpha \cdot \sigma_i \sqrt{L_i}$.

5. REFERENSI

Jurnal:

[1] Alshambari, H. M. Constrained Periodic-Review Probabilistic Inventory Model with Increasing Holding Cost for Two Different Cases of the Relational Function. *Journal of Statistics Applications&Probability*. 2021; Vol. 10 (3): 913-922. <http://dx.doi.org/10.18576/jsap/100327>

[2] Annadurai, K. dan Uthayakumar, R. Ordering Cost Reduction in Probabilistic Inventory Model with Controllable Lead Time and A Service Level. *International Journal of Management Science and Engineering Management*. 2010; Vol. 5 (6): 403-410. <https://doi.org/10.1080/17509653.2010.10671131>

[3] Reyes, et. al., A Mathematical Model for An Inventory Management and Order Quantity Allocation Problem with Nonlinear Quantity Discounts and Nonlinear Price-Dependent Demand. *Axioms*. 2023; Vol. 12 (6): 1-15. <https://doi.org/10.3390/axioms12060547>

- [4] Rezaei, J. dan Davoodi, M. A Deterministic, Multi-Item Inventory Model with Supplier Selection and Imperfect Quality. *Applied Mathematical Modelling*. 2008; Vol. 32 (10): 2106-2116. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2007.07.009>
- [5] Sondakh, E. Ekspektasi Banyaknya Kekurangan Persediaan Selama Lead Time dalam Model Probabilistik Sederhana. *Jurnal Logistik Bisnis*. 2023; Vol. 13 (1): 9-11. <https://doi.org/10.46369/logistik.v13i1.2954>

Buku Teks:

- [6] Bahagia, S. N. Sistem Inventori. *Penerbit ITB*. Bandung. 2006